



ISSN 1728-7901

Абай атындағы Қазақ ұлттық педагогикалық
университеті

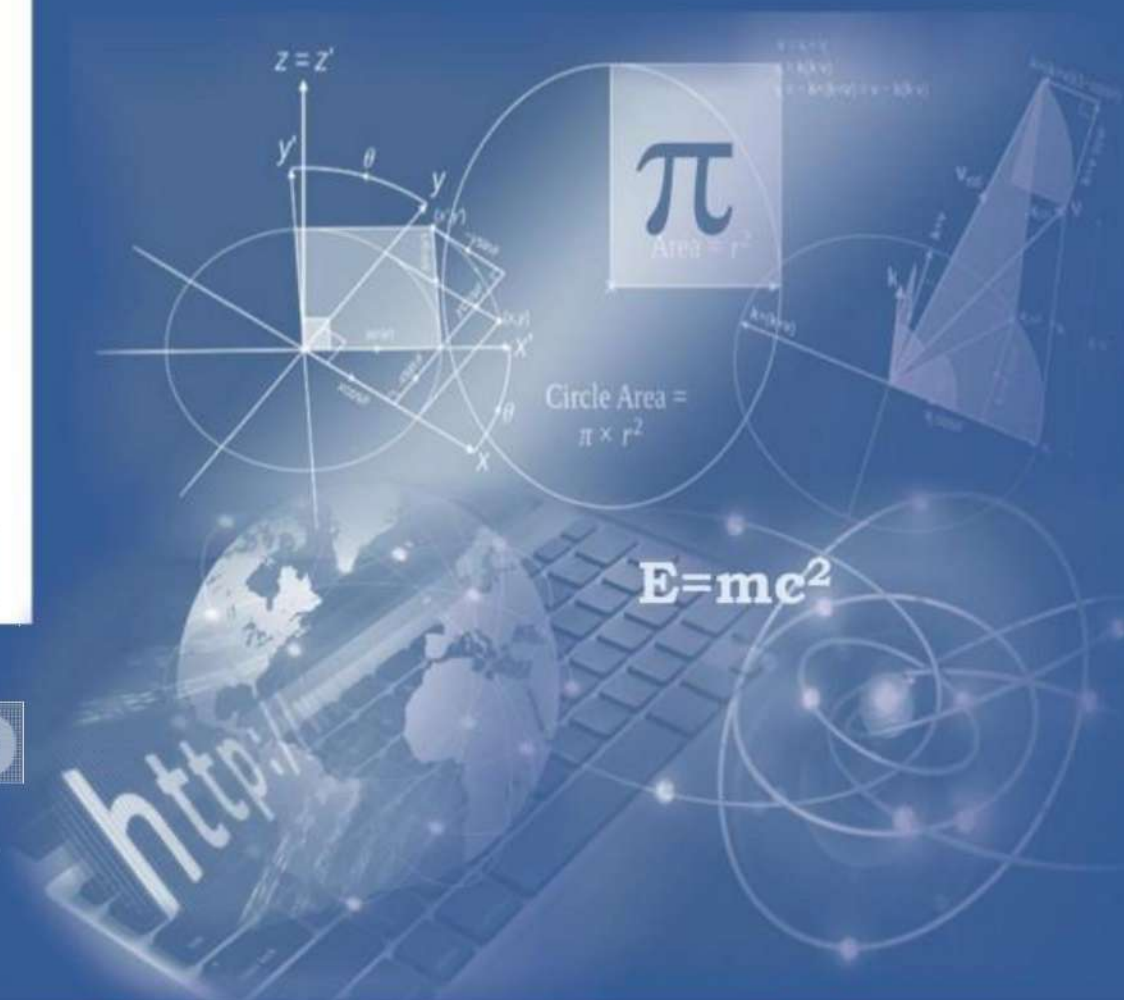
Казахский национальный педагогический
университет имени Абая

ХАБАРШЫ ВЕСТНИК BULLETIN

«Физика-математика ғылымдары» сериясы
серия «Физико-математические науки»

№ 4(72)

2020



References:

- 1 Kabanikhin S.I. *Inverse and ill-posed problems*. Novosibirsk: Siberian Scientific Publishing House, 2009, 457
- 2 Kabanikhin S.I., Koptug I.V., Iskakov K.T., Sagdeev R.Z. *Inverse problem for diffusion transport of water upon single pellet moisture sorption*. *International Journal of Nonlinear Sciences and Numerical Simulation Shanghai University* v.1, 2000, pp.31-42.
- 3 Kabanikhin S.I., Koptug I.V., Iskakov K.T. and Sagdeev R.Z. *Inverse problem for a quasilinear equation of diffusion*. *Journal of Inverse and Ill-Posed Problem* (1998) vol. 6(4), The Netherlands, Utrecht, pp. 335-352.
- 4 Denisov A.M. *Introduction to the theory of inverse problems*. М.: Publishing house of Moscow State University, 1994, 208 p.

МРНТИ 28.25.23

УДК 519.6

R. KALMAN'S PROBLEM ABOUT FIBONACCI'S NUMBERS

Iskakova M.T.¹, Shuakayev M.K.¹, Tuiykov E.A.¹, Nazarbekova K.T.²

¹Abai Kazakh National Pedagogical University, Almaty, Kazakhstan

²al-Farabi Kazakh National University, Almaty, Kazakhstan

Abstract

In this paper authors are considered the R. Kalman's problem about of Fibonacci numbers. An overview of research methods for control theory systems in two concepts "state space" and the "input-output" mapping is presented. In this paper, we consider the problem of R. Kalman on Fibonacci numbers, which consists in the following. R. Kalman's problem on Fibonacci numbers is considered, which is as follows. Fibonacci numbers form a minimal Realization. The authors of the article formulated a theorem, which was given the name of the outstanding American Scientist R. Kalman. The proof of the theorem is very cumbersome, therefore, authors proved it using an example when the Fibonacci numbers are obtained on the basis of the application of the B. Ho's algorithm. B. Ho is a purple of R. Kalman.

In this paper, the algorithm of B. Ho is given, which allows one to find the parameters of the initial linear deterministic system. Based on these parameters, we find the initial Fibonacci numbers. Thus, Fibonacci numbers are closely related to the problem of linear deterministic implementation and to B. Ho's algorithm.

Keywords: Fibonacci numbers, minimal realization, B. Ho algorithm, systems theory, the concept of "states space" and the Map "input - output".

Аннотация

М.Т. Исакова¹, М.К. Шуакаев¹, Е.А. Туяков¹, К.Т. Назарбекова²

¹Казахский национальный педагогический университет имени Абая, г.Алматы, Казахстан

²Казахский национальный университет имени аль-Фараби, г.Алматы, Казахстан

ПРОБЛЕМА Р. КАЛМАНА О ЧИСЛАХ ФИБОНАЧЧИ

В работе рассматривается проблема Р. Калмана о числах Фибоначчи. Представлен обзор методов исследования систем теории управления в двух концепциях «пространство состояний» и отображение «вход – выход». Рассматривается проблема Р. Калмана о числах Фибоначчи, которая заключается в следующем. Числа Фибоначчи образуют минимальную реализацию. Авторы статьи сформулировали теорему, которой дали имя выдающегося американского ученого Р. Калмана. Доказательство теоремы весьма громоздкое, поэтому авторы доказали ее на примере, когда числа Фибоначчи получаются на основе применения алгоритма Б. Хо – ученика Р. Калмана.

В работе приводится алгоритм Б. Хо, который позволяет найти параметры исходной линейной детерминированной системы. На основании этих параметров мы находим исходные числа Фибоначчи. Тем самым, числа Фибоначчи имеют тесную связь с проблемой линейной детерминированной реализации и с алгоритмом Б. Хо.

Ключевые слова: числа Фибоначчи, минимальная реализация, алгоритм Б. Хо, теория систем, концепции «пространство состояний» и отображение «вход – выход».

Аңдатпа

М.Т. Искакова¹, М. Қ. Шуақиев¹, Е.А. Тұяқов¹, К.Т. Назарбекова²

¹Абай атындағы Қазақ ұлттық педагогикалық университеті, Алматы қ., Қазақстан

²Әл-Фараби атындағы Қазақ ұлттық университеті, Алматы қ., Қазақстан

ФИБОНАЧЧИ САНДАРЫ ТУРАЛЫ Р. КАЛМАННЫҢ МӘСЕЛЕСІ

Мақалада Фибоначчи сандары жайлы Р.Кальман мәселесі қарастырылған. Бұл мақалада «кеңістік жағдайы» және «енгізу-шығару» бейнеленуі екі тұжырымдамасындағы басқару теориясының жүйелерін зерттеу әдістеріне шолу келтірілген. Фибоначчи сандары туралы Р.Кальман мәселесі қарастырылады, ол төменде келтіріледі. Фибоначчи сандары минималды енгізуді құрайды. Мақала авторлары көрнекті американдық ғалым Р.Кальманның есімімен аталатын теореманы тұжырымдады. Теореманың дәлелі өте қиын, сондықтан авторлар Фибоначчи сандарын Б.Хо-шәкірті Р.Кальманның алгоритмінің негізінде алынған кезде мысал келтіріп дәлелдеді. Бұл жұмыста бастапқы сызықтық детерминистикалық жүйенің параметрлерін табуға мүмкіндік беретін Б. Хо алгоритмі келтірілген. Осы параметрлер негізінде Фибоначчидің бастапқы сандарын табамыз. Сонымен, Фибоначчи сандары сызықтық детерминистік іске асыру мәселесімен және Б.Хо алгоритмімен тығыз байланысты.

Түйін сөздер: Фибоначчи сандары, минималды енгізу, Б. Хо алгоритмі, жүйелер теориясы, «кеңістік жағдайы» тұжырымдамасы және «кіру-шығу» бейнелеуі.

In the theory of Volterra's series exists three main directions of their research. The first [1-4] – uses a method of the analysis of the "Space of States" transformation which is based on the description of system on the base of some functionality. It allows considering system as converter of the process operating on it's into output process. There are two concepts of the description r investigation of mathematical models in conception of the transformation "Space of States". In this case, it isn't required information about internal structure of system; its properties are investigated in terms of global characteristics of systems as whole. The second [1-4] the deterministic (stochastic) system the differential ordinary (stochastic) equations on the basis of the known Map "Input - Output" presented in the form of a deterministic (stochastic) Volterra's series.

Analysis of Methods of the Deterministic Realization.

The realization problem for linear dynamic systems was formulated by R.Kalman for the first time in [1-4] it consists in finding of parameters of the linear system according to Output data. This task for linear stationary systems was firstly solved by B. Ho in [1-4]. Other decision for the same task is received in too it was a high time, in [45] where properties of controllability and observe ability of dynamic linear systems were used. Both of these algorithms demand calculations linearly. In [5] Fibonacci's numbers were described very well.

In [6] R. Kalman stated by following problem.

Fibonacci's numbers forms minimal rationalization.

Consider problem minimal rationalization. Let we know Map "input – output"

$$y(t) = \int_0^t ce^{A(t-\tau)} BU(\tau) d\tau, \quad (1)$$

where

$$W(\bullet) = ce^{A(\bullet)} B, \quad (2)$$

$W(\bullet)$ – transitional matrix of dimensional $p \times m$.

On a transitional matrix (2) it is required to find parameters (A, B and C) of following system

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \quad (3)$$

$$y(t) = Cx(t), \quad (4)$$

where A, B and C – matrix, accordingly, $n \times n$, $n \times m$ and $p \times n$ of dimensional, $u(\bullet) \in R^m$, $y(\bullet) \in R^p$, $u(\bullet)$ – input and $y(\bullet)$ – output of a system, $p \leq n$, $m \leq n$.

This problem for the first time was solved Elmer Gilbert on the basis of properties of a controllability and observability, but the first algorithm of realization was given B. Ho, where there was one input and one output, i.e. $m = p = 1$ (see [1-4].

The algorithm of a solution of a problem of realization consist of the following steps.

1 step. On the base of known transitional matrix $W(t)$ (2) we shall calculate block Gankel's matrix H as follows:

$$\begin{aligned} W(0) &= CB = H_1, \\ \left. \frac{dW(t)}{dt} \right|_{t=0} &= CAB = H_2, \\ &\dots\dots\dots \\ \left. \frac{d^{n-1}W(t)}{dt} \right|_{t=0} &= CA^{n-1}B = H_n. \end{aligned} \quad (5)$$

2 step. Construction Gankel's matrix H

$$H = \begin{pmatrix} H_1 & H_2 & \dots & H_n \\ H_2 & H_3 & \dots & H_{n+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ H_n & H_{n+1} & \dots & H_{2n-1} \end{pmatrix}. \quad (6)$$

3 step. Choose arbitrary matrixes

$$\begin{aligned} P &= (P_1 \ P_2 \ \dots \ P_{n-1} \ P_n), \\ M &= (M_1 \ M_2 \ \dots \ M_{n-1} \ M_n), \end{aligned} \quad (7)$$

satisfying to the following matrix's equation

$$P \cdot H \cdot M = I, \quad (8)$$

where I – unit matrix and $M_1, M_2, \dots, M_{n-1}$ – known matrixes.

4 step. From (8) we define M_n by of the following transformations

$$\begin{aligned} &\left(\sum_{i=1}^n P_i H_i \quad \sum_{i=1}^n P_i H_{i+1} \quad \dots \quad \sum_{i=1}^n P_i H_{i+n-1} \right) \begin{pmatrix} M_1 \\ M_2 \\ \dots \\ M_n^* \end{pmatrix} = I \\ &\left(\sum_{i=1}^n P_i H_i \right) M_1 + \left(\sum_{i=1}^n P_i H_{i+1} \right) M_2 + \dots + \left(\sum_{i=1}^n P_i H_{i+n-2} \right) M_{n-1} + \left(\sum_{i=1}^n P_i H_{i+n-1} \right) M_n^* = I \\ &M_n^* = I - \left[\sum_{i=1}^n P_i H_{i+n-1} \right]^{-1} \left[\left(\sum_{i=1}^n P_i H_i \right) M_1 + \dots + \left(\sum_{i=1}^n P_i H_{i+n-2} \right) M_{n-1} \right]. \end{aligned}$$

5 step. Let's define

$$\mathcal{H} = \begin{pmatrix} H_2 & H_3 & \dots & H_{n+1} \\ H_3 & H_4 & \dots & H_{n+2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ H_{n+1} & H_{n+2} & \dots & H_{2n} \end{pmatrix}. \quad (9)$$

6 step. We define parameters of a system (3)-(4) of the following relations

$$\begin{aligned} A &= P(9H)M, \\ B &= PH, \\ C &= HM. \end{aligned} \quad (10)$$

Solution of R.Kalman`s problem.

**R.Kalman`s theorem.** If sequence forms Fibonacci`s numbers, then this Fibonacci`s numbers forms minimal realization accordingly, formulated by R.Kalman.

Because proof of this theorem is very longer. Therefore, we present by following example, which proves of our theorem.

Put we have simple Fibonacci`s numbers

$$0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, \dots \quad (11)$$

Put on the base formulas (6-8)

$$H = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},$$

And PHM=I.

Then

$$\begin{aligned} PH &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{11} + 2a_{21} & a_{12} + 2a_{22} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Father we have

$$a_{21} = 1, a_{22} = 0, a_{11} = -2, a_{12} = 1$$

$$M = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Then because

$$PH \cdot M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = I.$$

Accordingly, of formula (10) we received

$$A = P \cdot IH \cdot M = P \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$B = PH = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$C = HM = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

In second step we must Fibonacci`s numbers (11)

Because CB=0, then we received first number of Fibonacci`s numbers (11).

Father

$$CAB = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 1$$

we received second number of Fibonacci`s numbers (11).

$$A^2 = C \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$CA^2B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot B = 1$$

$$A^3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$$

$$CA^3B = (-1 \ 2) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 2.$$

$$A^4 = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ -3 & 8 \end{pmatrix}$$

$$CA^4B = (-1 \ 3) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 3$$

$$A^5 = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ -3 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 5 \\ -5 & 13 \end{pmatrix}$$

$$CA^5B = (-2 \ 5) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 5$$

$$A^6 = \begin{pmatrix} -2 & 5 \\ -5 & 13 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 8 \\ -8 & 21 \end{pmatrix}$$

$$CA^6B = (-3 \ 8) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 8$$

$$A^7 = \begin{pmatrix} -3 & 8 \\ -8 & 21 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & 13 \\ -13 & 34 \end{pmatrix}$$

$$CA^7B = (-5 \ 13) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 13$$

$$A^8 = \begin{pmatrix} -5 & 13 \\ -13 & 34 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 & 21 \\ -21 & 55 \end{pmatrix}$$

$$CA^8B = (-8 \ 21) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 21$$

$$A^9 = \begin{pmatrix} -8 & 21 \\ -21 & 55 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -13 & 34 \\ -34 & 89 \end{pmatrix}$$

$$CA^9B = (-13 \ 34) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 34$$

$$A^{10} = \begin{pmatrix} -13 & 34 \\ -34 & 89 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -21 & 55 \\ -55 & 144 \end{pmatrix}$$

$$CA^{10}B = (-21 \ 55) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 55$$

$$A^{15} = \begin{pmatrix} -144 & 377 \\ -377 & 987 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -233 & 610 \\ -610 & 1597 \end{pmatrix}$$

$$CA^{15}B = 610$$

$$A^{16} = \begin{pmatrix} -233 & 610 \\ -610 & 1597 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -377 & 987 \\ -987 & 2484 \end{pmatrix}$$

$$CA^{16}B = 987$$

$$H = \begin{bmatrix} h_1 & h_2 & \dots & h_n \\ h_2 & h_3 & \dots & h_{n+1} \\ h_n & h_{n+1} & \dots & h_{2n+1} \end{bmatrix},$$

$$\Omega H = \begin{bmatrix} h_2 & h_3 & \dots & h_{n+1} \\ h_3 & h_4 & \dots & h_{n+2} \\ h_{n+1} & h_{n+2} & \dots & h_{2n} \end{bmatrix}.$$

Conclusion. In this paper authors considered the R. Kalman's problem about of Fibonacci numbers. This paper provides an overview of research methods for control theory systems in two concepts "state space" and the "input-output" mapping. In this paper, we consider the problem of R. Kalman on Fibonacci numbers, which consists in the following. Fibonacci numbers formed minimal Realization.

References:

- 1 Асаубаев К.Ш., Шуакаев М.К. Ряды Вольтерры и теория управления. – том 1, Алма-Ата, 1993 г. 167 с.
- 2 Асаубаев К.Ш., Шуакаев М.К. Алгебры и группы Ли. Ряды Вольтерры и теория управления. – том 2, Алматы, 1993 г. 187 с.3.
- 3 Асаубаев К.Ш., Шуакаев М.К. Ряды Вольтерры и теория управления. – том 3, Алматы, 1993 г. 187 с.
- 4 Francesco Carravetta, Alfredo Germani, Marat K. Shuakayev «A New Suboptimal Approach to the Filtering Problem for Bilinear Stochastic Differential Systems», SIAM J. Control Optim. Vol.38, No.4, pp. 1171 – 1203.
- 5 Luca, Florian; Mejía Huguet, V. Janitzio (2010). "On Perfect numbers which are ratios of two Fibonacci numbers". *Annales Mathematicae at Informaticae*. 37: 107–24. ISSN 1787-6117. MR 2753031.
- 6 Калман Р.Е., Фалб П., Арбиб М. Очерки по математической теории систем. – М.Мир, 1971.

МРНТИ 27.03.45
УДК 51.511.534

А.Е. Исмайылов¹, Ж. Кожамкулова², М. Серикулы³

^{1,3}Алматинский технологический университет, г.Алматы, Казахстан

²Алматинский университет энергетики и связи, г.Алматы, Казахстан

АЛГОРИТМ ПОЛУЧЕНИЯ ОПТИМАЛЬНОГО ГАРАНТИРОВАННОГО РЕЗУЛЬТАТА ДЛЯ ОБЪЕКТОВ С ЭКСТРЕМАЛЬНЫМИ СОСТОЯНИЯМИ

Аннотация

В работе разработан алгоритм получения оптимального гарантированного результата для объектов с экстремальными состояниями основанный на установлении функции и функционалов аналитического вида. Изложена методика выбора стратегии управления объектом с наилучшим гарантированным результатом. Сущность методики заключается в нахождении оптимального решения многокритериальной задачи, которое максимизирует значения всех функций. При этом существование решения, буквально максимизирующего все целевые функции, является редким исключением. Рассматривалась проблема получения гарантированного результата и исследование возможности его улучшения, а также проблема выбора рационального решения.

Установлено, что стратегия, которая имеет в данной операции оценку эффективности, равную наилучшему (наибольшему) гарантированному результату, и является оптимальной гарантирующей стратегией. Определена целевая функция, также предпринята оптимально гарантированная стратегия для управления биотехнологических производств с применением информационных технологий.

Ключевые слова: многокритериальная задача, наилучший гарантированный результат, наибольший гарантированный результат, биотехнологическая производства (БТП), концепций оптимальности.